

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Populační ekologie

Matice a dif rovnice - nalévárna

Pavel Fibich

pavel.fibich@prf.jcu.cz

8. října 2020

Proč?

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Proč povídat o maticích, diferenciálních (δR) a diferenčních rovnicích (ΔR) v kurzu Populační ekologie?

- maticové modely se hodí na popis přechodů (mezi roky, mezi vývojovými stádii), hledáme stabilní zastoupení v populaci
- δR a ΔR jsou vhodné pro popisy vztahů a vývoje v čase

Příklady – Matice

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

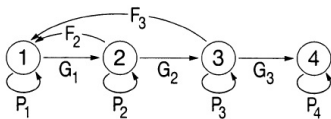
Shrnutí matic

Rovnice

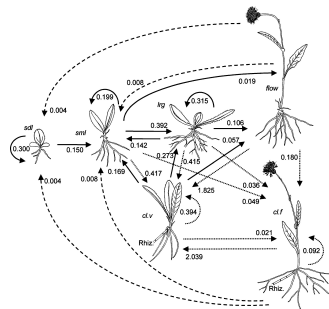
Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic



$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$



Příklady – Diferenciální rovnice

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

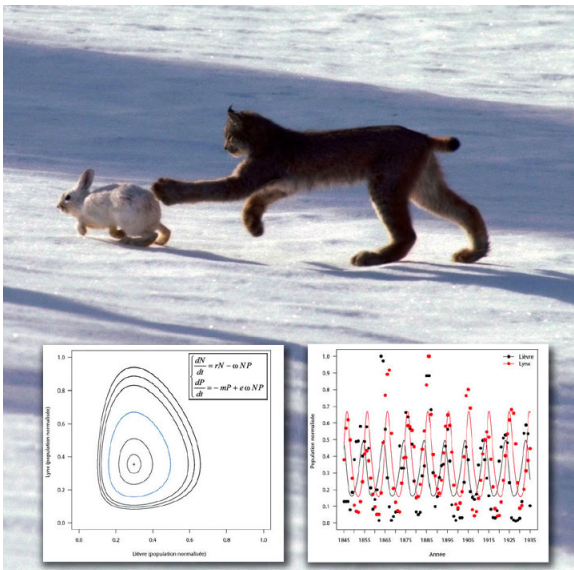
Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic



Vektor a Matice

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Vektor je veličina charakterizovaná velikostí a směrem, zn. \vec{x} , je to uspořádaná n -tice čísel x_j . Např.: \vec{x}^{31} , \vec{y}^{21} , \vec{z}^{14}

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ a * b \\ i \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = (5 \ 3 \ 9 \ 1)$$

Matice je charakterizovaná počtem řádků a sloupců. Skládá se z vektorů. Např. A^{32} , E^{33}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé prvky matice se odkazují indexy, a_{ij} je prvek na i -tém řádku a v j -tém sloupci.

Hodí se na zápis lineárního zobrazení, řešení obyčejných δR , k vyjádření soustavy lineárních rovnic, ...

Matice

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Vyjádření soustavy lineárních rovnic, např.

$$\begin{array}{rclcl} 3 * x & -y & +z & = & 3 \\ -x & & -z & = & 2 \\ x & +8 * y & -2 * z & = & 0 \end{array} \quad (1)$$

maticově (neznámé a pravé strany jsou vektory)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zkrácený zápis $A * \vec{n} = \vec{b}$. Když jsou pravé strany nulové, říkáme že je soustava **homogenní**.

Operace s maticemi a vektory

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Vektory jdou

- $\vec{a}^{21} + \vec{b}^{21} = \vec{x}^{21}$ sčítat, jsou-li kompatibilní
- $\vec{a}^{31} * c = \vec{x}^{31}$ násobit skalárem,
- $\vec{x}^{m1} * \vec{y}^{1n} = A^{mn}$, $\vec{x}^{1n} * \vec{y}^{n1} = c$ násobit mezi sebou, ...

Matice jdou

- $A^{mn} + B^{mn} = C^{mn}$ sčítat jsou-li stejných rozměrů
- $A^{mn} * c = C^{mn}$ násobit skalárem (číslem)
- $A^{mn} * \vec{b}^{n1} = \vec{c}^{m1}$ násobit kompatibilním vektorem
- $A^{mn} * B^{nk} = C^{mk}$ násobit mezi sebou mají-li společný rozměr
- $(A^{mn})^T = A^{nm}$ transponovat (převracet)
- A^{-1} invertovat (hledat opačnou matici), ...

Operace s maticemi

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Sčítání matic je komutativní. $A^{mn} + B^{mn} = C^{mn}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Násobení matice skalárem je komutativní. $A^{mn} * c = C^{mn}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} * 3 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Násobení matice vektorem není komutativní. Pro $A^{mn} * \vec{b}^{n1} = \vec{c}^{m1}$ je definováno jako $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} * b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Násobení matice vektorem je speciální případ násobení dvou matic. Vzorec pro výpočet zůstává stejný.

http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~matmult.html

Co nás u matic zajímá

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Hrubá charakteristika matice (jedno, málo čísel).

Determinant zn. $\det A$, $|A|$

- čtvercové matici $n \times n$ přiřadíme číslo (skalár),
- absolutně odpovídá škálování objemu daného lineární transformací kterou matice popisuje
- počítá se pomocí Sarrusova pravidla (jen velikost $2 \times 2, 3 \times 3$), Leibnizovým vzorcem (libovolná)

Charakteristická rovnice je dána $|A - \lambda * E| = 0$, např.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = |A - \lambda * E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 * \lambda + 2$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Vlastní (charakteristická) čísla jsou kořeny charakteristické rovnice, zn. λ_i

Vlastní vektor je vektor \vec{u} který vyhovuje rovnici

$$(A - \lambda * E) * u = 0$$

Vlastní číslo má svůj vlastní vektor. Nebo jinak

$$A * \vec{u} = \lambda * \vec{u}$$

$\vec{u} \neq 0$ je vlastní vektor a λ je vlastní číslo.

Vlastní vektory se v ekologii používají jako charakteristika stabilní (věkové) struktury pro danou přechodovou matici.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = |A - \lambda * E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 * \lambda + 2$$

Kořeny rovnice jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, a vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_1 & -1 \\ 2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} * u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} * u_1$$

řešením je např. vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Podobně je třeba dopočítat vlastní vektor pro λ_2 .

Power iteration (method)

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Metoda počítající vlastní čísla a vektory bez rozkladu (nepočítá determinant). Tato metoda najde jen dominantní (největší) vlastní číslo a k němu náležící vlastní vektor. Výpočet probíhá v iteracích

$$b_{k+1} = \frac{Ab_k}{\|Ab_k\|}$$

Začíná se nenulových b_0 a v každém kroku se výsledek normalizuje.

Jde použít i na velké matice, ale může konvergovat pomalu. Používá ji Šuspa, Google (PageRanks) i Twitter (recommendations).

Příklady

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

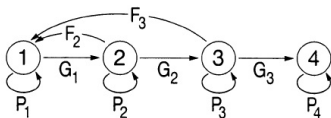
Shrnutí matic

Rovnice

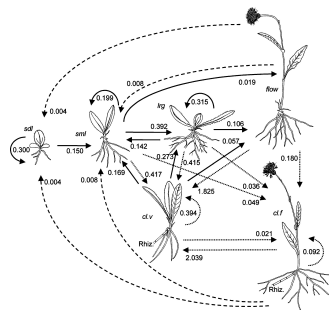
Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic



$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$



Shrnutí matic

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

- Matice se skládá z řádků a sloupců
- S maticemi jdou provádět základní aritmetické operace
 - které ale často nespĺňují komutativní zákon
 - nebo nejsou vůbec definovány kvůli nekompatibilní velikosti
- S maticemi jde lehce pracovat v matematickém softu (R, Matlab, ...)
- Vlastní vektory a vlastní čísla charakterizují matici, v ekologii charakterizují stabilní (věkovou, velikostní) strukturu.

Literatura a odkazy

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

- `http://www.kwon3d.com/theory/vectmat.html`
- **On-line výpočet** `http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~matmult.html`
- `http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/eLessonsHTML/Circuit/MatVecMultiply.htm`

Úvodní pojmy

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

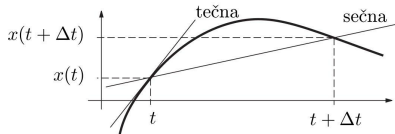
Shrnutí rovnic

Směrnice k přímky $y = k * x + q$

- udává poměr změny veličiny y a při změně x
- k určuje zda je přímka (y) klesající/rostoucí/nezávislá na x

Derivace funkce $x(t)$ vyjadřuje změnu funkce $x(t)$ (jejího výsledku, obrazu) vzhledem ke změně parametru t

- značíme $\frac{dx}{dt}$ nebo často jen zkráceně x' (tj. když víme podle čeho derivujeme)
- $x'(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
- je směrnice tečny v bodě
- např. rychlost = derivace vzdálenosti podle času



Diferenciální rovnice (δR)

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

δR je matematická rovnice tvaru

$$y'(t) = f(t, y)$$

v níž neznámou (řešením) je funkce (y). Derivace této funkce (y') a případně samotná funkce je také obsažena v rovnici. Za **řešení** (integrál) δR považujeme každou funkci y , která vyhovuje δR .

Příklady:

- $y' = r * y$, řešení $y(t) = y_0 * e^{r*t}$
- $dy/dt = r * y(1 - y/K)$, řešení $y(t) = \frac{K*y_0}{y_0 + (K - y_0)*e^{-r*t}}$

Uvedené δR mají nekonečně mnoho řešení, proto často uvádíme **počáteční podmínky** $y(t_0) = y_0$ (např. $y(0) = 5$).
Pravá strana δR říká jak se y mění.

Typy a řešení δR

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Říkáme, že δR je 1., 2., ... **řádu** pokud obsahuje 1., 2., ... derivaci neznámé funkce.

Typy DR dle derivace

- **obyčejné δR** obsahují derivace hledané funkce jen podle jedné proměnné,
- **parciální δR** obsahují derivace hledané funkce podle více proměnných

Typy δR dle pravé strany

- se separovanými proměnnými, homogenní, ...

Řešení

- obecné nebere v úvahu počáteční podmínky,
- parciální musí splňovat počáteční podmínky

Geometrický význam $y' = f(t, y)$

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

V každém bodě (t^*, y^*) v rovině dané osami t a y je dána hodnota $f(t^*, y^*)$

- která udává derivaci fce $y(t)$, která je řešením δR a platí $y(t^*) = y^*$ v bodě t^* a současně je tedy směrnicí tečny v bodě t^*
- směrnicí je jednoznačně zadán směr tečny
- můžeme tak nakreslit v každém bodě (t^*, y^*) šipku (čárku) se směrnicí $f(t^*, y^*)$

Výsledný obrázek je **směrové pole**.

Směrové pole $y' = y * r * (1 - y/K)$

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

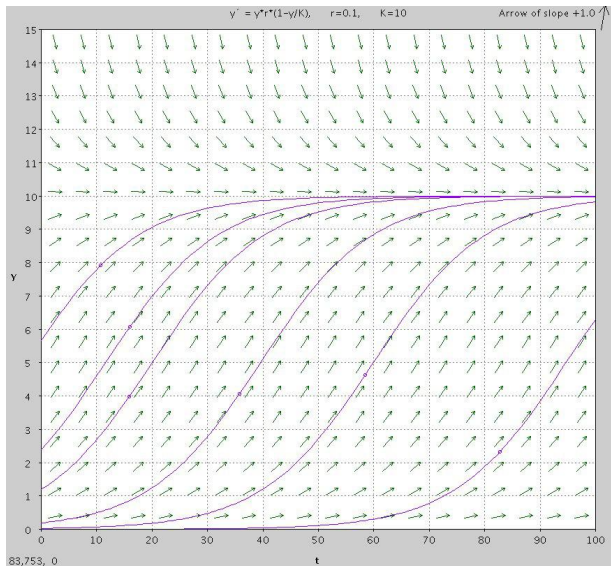
Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic



Řešíme δR

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Jak řešit $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$?

- **analyticky** podle pravé strany rovnice integrováním; je-li rovnice trochu složitější je to pracné nebo neřešitelné
- **numericky** získáme přibližné řešení, metody
 - Eulerova metoda
 - Runge-Kutta
 - Prediktor-Korektor, ...

Řešíme δR analyticky- příklad

Populační
ekologie

Máme $\frac{dy}{dt} = r * y$, kde $r = b - d$ (birth - death). r růst populace a y velikost populace.

Řešíme separací proměných $\frac{dy}{r*y} = dt$ a integrováním

$$\int \frac{dy}{r * y} = \int dt$$

$$\frac{1}{r} \ln y = t + C$$

vyjádříme si postupně y

$$\ln y = r * (t + C)$$

$$y = e^{r*(t+C)} = e^{r*c} * e^{r*t} = K * e^{r*t}$$

Nyní můžeme zvolit počáteční podmínky $y(t_0) = y_0$ a $t = 0$

$$y_0 = K * e^0 = K$$

Dohromady máme řešení δR ve tvaru $y = y_0 * e^{r*t}$.

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Analytické řešení $\frac{dy}{dt} = r * y$ je $y = y_0 * e^{r*t}$

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

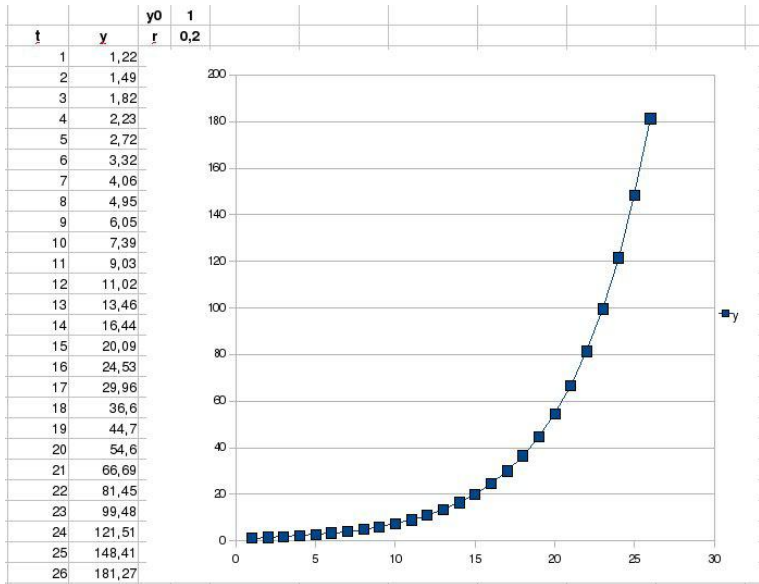
Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic



Eulerova metoda - numerické řešení δR

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

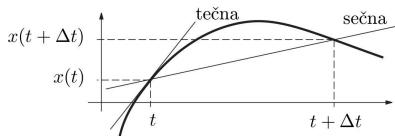
Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Nehledáme řešení $y' = f(t, y)$ (což už víme, že je funkce y), ale použijeme **aproximaci tečnou**.

Postupujeme v diskrétních krocích Δt . V bodě (t_0, y_0) má integrální křivka tečnu o směrnici $f(t_0, y_0)$. Nahradíme-li integrální křivku tečnou, změní se na tečně veličina t o hodnotu Δt , pak se hodnota y změní o $\Delta y = f(t_0, x_0) * \Delta t$. Pro krátký krok Δt je tato aproximace zpravidla vyhovující.



Eulerova metoda - numerické řešení

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Pro bod $(t_0 + \Delta t)$ dostáváme řešení

$$y(t_0 + \Delta t) = y_0 + f(t_0, y_0) * \Delta t$$

A obecně

$$y_{t+1} = y_t + f(t_n, y_n) * \Delta t$$

Je to nejjednodušší metoda, je málo přesná. Čím menší Δt tím je přesnější, ale to znamená že musíme provést víc kroků.

Eulerova metoda - příklad v excelu

Populační ekologie

Pavel Fibich

Vektor a Matice

Shrnutí matic

Rovnice

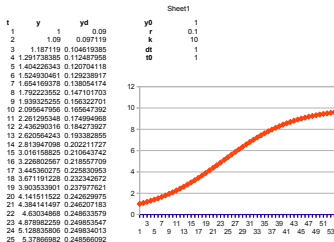
Diferenciální rovnice

Diferenční rovnice

Shrnutí rovnic

Pusťte si excel a zkusíme použít Eulerovu metodu na řešení $y' = f(t, y) = r * y * (1 - y/K)$ s počátečníma podmínkami $t_0 = 1, y_0 = 1, r = 0.1, K = 10, \Delta t = 1$

t	y	Δy
t_0	y_0	$\Delta y_0 = f(t_0, y_0) * \Delta t$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$\Delta y_1 = f(t_1, y_1) * \Delta t$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$\Delta y_2 = f(t_2, y_2) * \Delta t$
...



Ostatní metody pro numerické řešení *DR*

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Další metody (Runge-Kutta, Prediktor-Korektor) pro numerické řešení diferenciálních rovnic jsou mnohem přesnější a jsou součástí knihoven pro matematický soft.

- Online -

 - <http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html>

- Komerční - Matlab, Maple, Mathematica

- Volně dostupné - Maxima, SciLab, R, Octave,...

Diferenční rovnice (ΔR)

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

ΔR jsou diskrétní podobou diferenciální rovnic (δR). Změny jsou chápány **skokově** nikoliv spojitě jako u δR (např. jako v Eulerově metodě).

ΔR má tvar

$$y_{n+1} = f(y_n),$$

a **řešením** je každá posloupnost $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje předchozí rovnici.

Pevný bod (PB) funkce f je číslo y^* takové, že $f(y^*) = y^*$.

Posloupnost PB $y = \{y^*\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením ΔR .

Rozlišujeme 2 typy pevných bodů:

- atraktivní PB - body v jeho okolí se k němu blíží
- repulzivní PB - body v jeho okolí jsou odpuzovány

Diferenční rovnice - příklad

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Aritmetická posloupnost je definována rekurentním vzorcem

$$a_{n+1} = a_n + \Delta$$

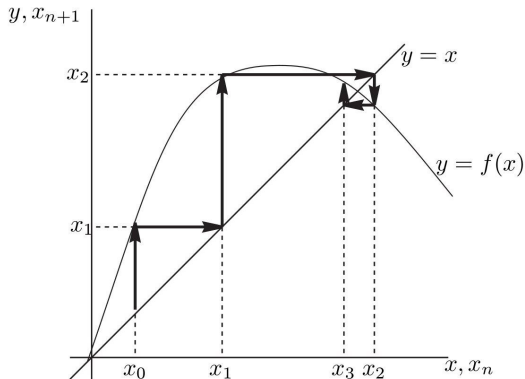
Diference je zde $a_{n+1} - a_n = \Delta$.

Řešením diferenční rovnice je posloupnost

$$a_n = a_0 + n * \Delta$$

Řešíme ΔR

Jednoduché grafické řešení (pavučinový model).
Zakreslíme $y = f(x)$ a $y = x$.



Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Převod DR na ΔR

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

Pokud je změna v diferenciální rovnici diskrétní, můžeme aproximovat DR pomocí ΔR .

$$dy/dt \approx \frac{y_{t+\Delta t} - y_t}{\Delta t}$$

To je například pro $y' = r * y * (1 - y/K)$ a $\Delta t = 1$

$$y_{n+1} = y_n + r * y_n * (1 - y_n/K)$$

Příklady

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matic

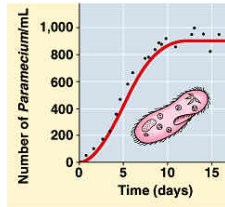
Shrnutí matic

Rovnice

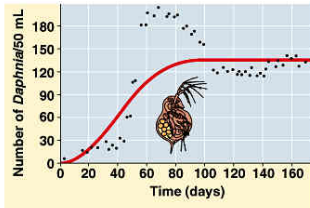
Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

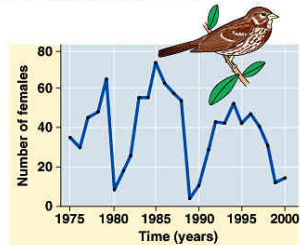
Shrnutí rovnic



(a) A *Paramecium* population in the lab



(b) A *Daphnia* population in the lab



(c) A song sparrow population in its natural habitat

lynx sleduje snowshoe

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

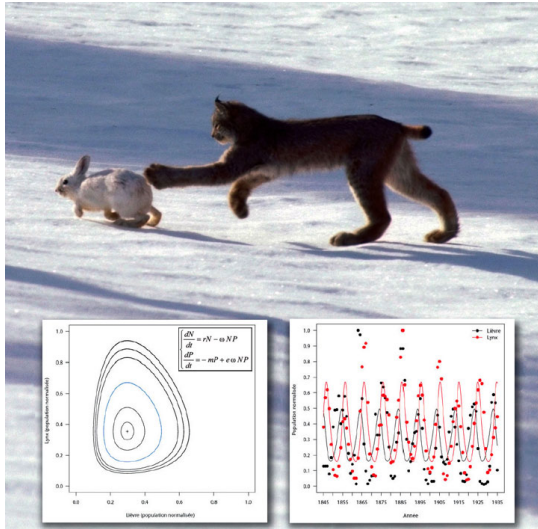
Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic



Shrnutí rovnic

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

- δR vyjadřují spojitou závislost, změnu (např. v čase) a jejich řešením je funkce.
- δR jdou řešit analyticky (integrováním) nebo numericky (aproximací).
- Metody pro numerické řešení jsou lehce použitelné v matematickém softu nebo často i v excelu.
- ΔR definují diskrétní (skokovou) závislost, řešením je posloupnost.
- $y' = r * y$ exponenciální růst (neomezený)
- $y' = r * y * (1 - y/K)$ logistický růst (omezený nosnou kapacitou prostředí K)

Literatura a odkazy

Populační
ekologie

Pavel Fibich

Vektor a
Matice

Shrnutí matic

Rovnice

Diferenciální
rovnice

Diferenční
rovnice

Shrnutí rovnic

- Mařík R., Dynamické modely v biologii. Skripta MZLU, 2004.
- Kot M., Elements of Mathematical Ecology. Cambridge University press, 2001.
- <http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html>